Graphes (structure de données)

BARBIER J.M. - LGT Dumezil - NSI

12 février 2026

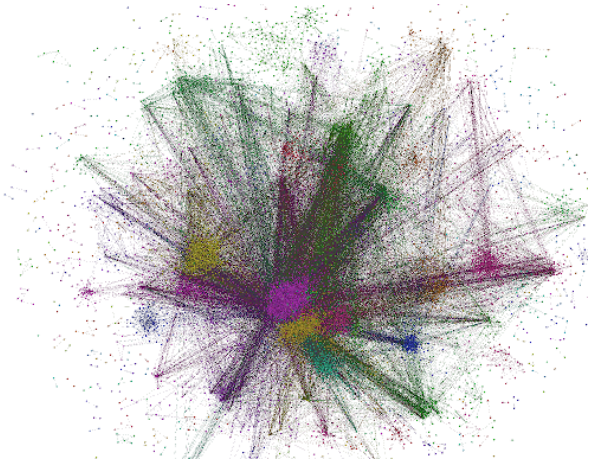
1 Introduction

1.1 Exemples

1.1.1 Réseaux sociaux

1.1.2 Réseaux de transport

1.1.3 Internet



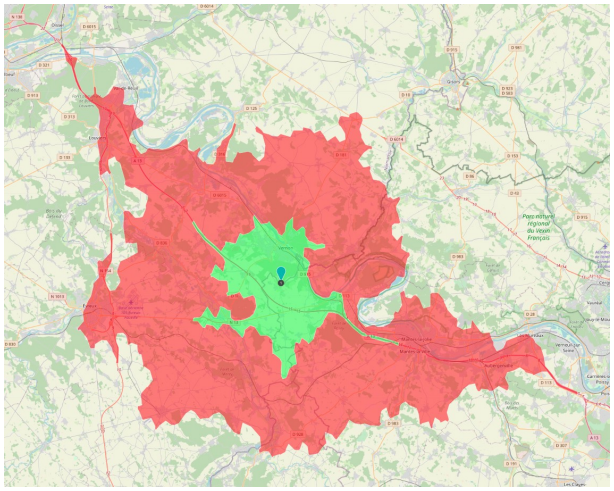
1.2 Utilisation en informatique

1.2.1 Recherche de chemins

Comment passer d'un état A à un état B

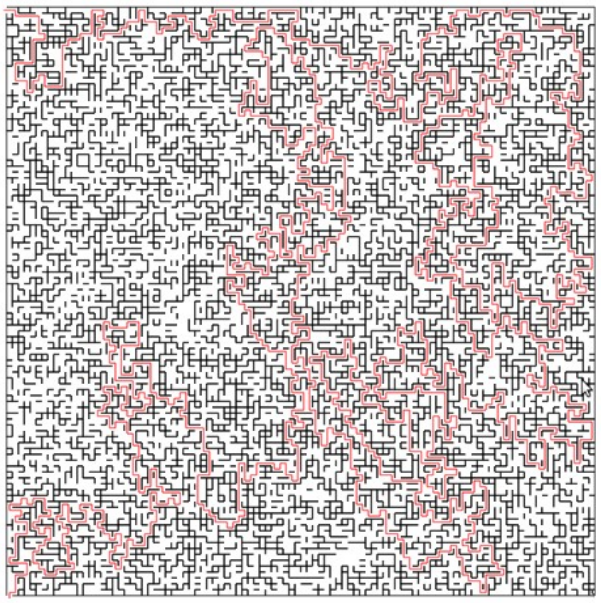
1.2.2 Exploration de graphe

- Recherche d'une meilleure route dans un réseau
- Recherche d'un trajet entre des villes sur une carte

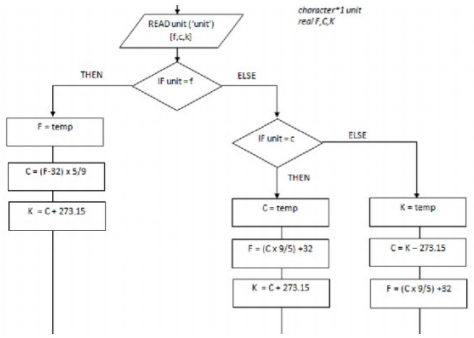


1.2.3 Recherche de cycles

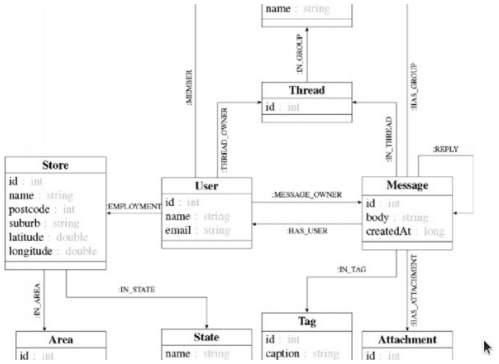
- Recherche de la sortie d'un labyrinthe



1.2.4 Algorithmes



1.2.5 Stockage de données



2 Définitions

2.1 Graphe simple

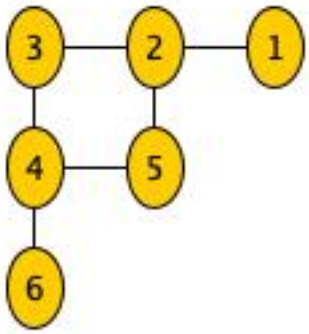
2.1.1 Définition

Un graphe simple est un couple $G = (V, E)$ comprenant

- V un ensemble de sommets (ou noeuds, ou vertice (en))
- E un ensemble d'arêtes reliant ces sommets (ou arcs, ou flèches, ou edge (en))

Une arête est un couple de sommets.

2.1.2 Exemple



2.2 Graphe orienté

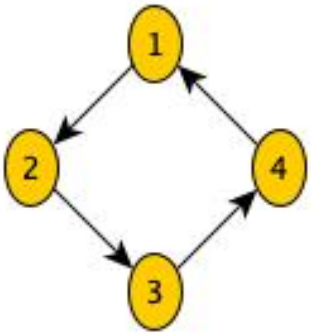
2.2.1 Définition

Lorsque les arêtes ont une **direction** (flèche), elles sont orientées

Une arête orientée ne se parcourt que dans le sens de la flèche. Dans ce cas on note généralement les arêtes avec des parenthèses pour désigner des couples.

Si c'est un réseau de transport, on peut se rendre de 1 vers 2, mais pas dans l'autre sens (sens interdit)

2.2.2 Exemple



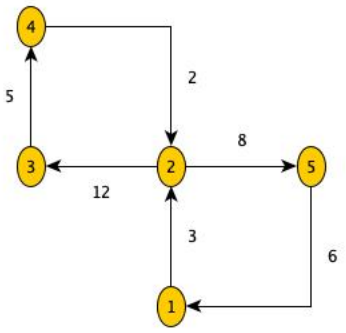
2.3 Graphe pondéré

2.3.1 Définition

Toutes les arêtes ne sont pas équivalentes (type de route par exemple)

On attribue un *poids* (weight) aux arêtes.

2.3.2 Exemple



2.4 Voisinage

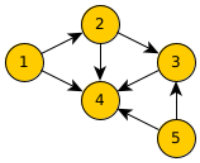
2.4.1 Définition

Lors qu'il y a un arc d'un sommet *s* à un sommet *t*, on dit que *t est adjacent à s*. Le voisinage d'un sommet est l'ensemble de ses sommets adjacents.

Dans un graphe non orienté, si il y a un chemin de u vers v, il y a aussi un chemin de v vers u, mais ce n'est pas forcément le cas dans un graphe orienté.

2.4.2 Exemple

Donner le voisinage de chacun des sommets du graphe orienté ci-dessous.



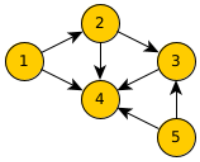
2.5 Chemin

2.5.1 Définition

Dans un graphe donné, un **chemin** reliant un sommet *u* à un sommet *v* est une séquence finie de sommets reliés deux à deux par des arcs et menant de *u* à *v*

2.5.2 Exemple

Donnez 3 chemins reliant 1 à 4 dans le graphe ci-dessous. Y a t'il un chemin entre 5 et 1 ?



2.6 Cycle

2.6.1 Définition

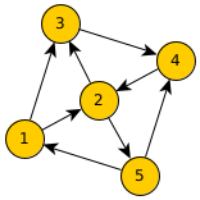
Un chemin est dit **simple** si il n'emprunte pas deux fois le même arc, et **élémentaire** si il ne passe pas deux fois par le même sommet.

Un chemin *simple* reliant un sommet à lui-même et contenant au moins un arc est appelé un **cycle**.

2.6.2 Exemple

Dans le graphe suivant :

- donnez un exemple de chemin **non simple**
- donnez un exemple de chemin **non élémentaire**
- donnez un exemple de **cycle**



2.7 Distance

2.7.1 Définition

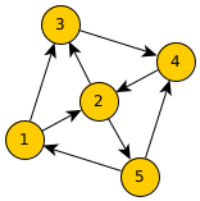
La **longueur d'un chemin** est définie comme le nombre d'arcs qui constituent ce chemin. La **distance** entre deux sommets est la longueur du plus court chemin reliant ces deux sommets. Si aucun chemin n'existe entre deux sommets, la distance n'est pas définie.

La distance d'un sommet à lui-même vaut zéro. Dans un graphe non orienté, la distance d'un sommet *u* vers un sommet *v* est la même que la distance entre *v* et *u*. Ce n'est pas forcément le cas dans un graphe orienté.

2.7.2 Exemple

Dans le graphe ci-dessous, donnez la distance entre :

— 1 et 4
— 4 et 1
— 5 et 3



2.8 Connexité

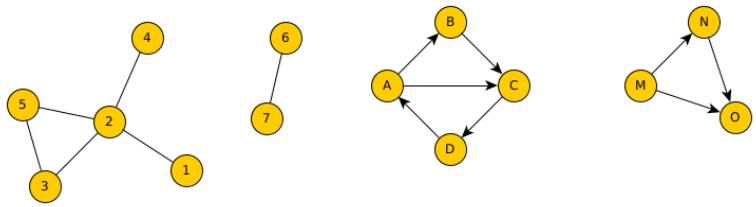
2.8.1 Définition

On dit qu'un graphe non orienté est **connexe** si, pour toute paire *u,v* de sommets, il existe un chemin de *u* à *v*.

Pour un graphe orienté, on dit qu'il est connexe si le graphe non orienté obtenu en oubliant le sens des flèches est connexe. On dit qu'il est **fortement connexe** si il existe un chemin de *u* vers *v* sans oublier le sense des flèches.

2.8.2 Exemple

Graphe non orienté non connexe, graphe orienté fortement connexe, graphe orienté connexe.



3 Implémentations

3.1 Introduction

3.1.1 Différence avec arbres

— pas de noeud privilégié
— pas de structure hiérarchique

Il est nécessaire de pouvoir représenter les sommets et les arêtes.

Les sommets peuvent être enregistrés dans n'importe quelle **collection** (liste, dictionnaire, tuple…)

Pour les arêtes il y a plusieurs possibilités

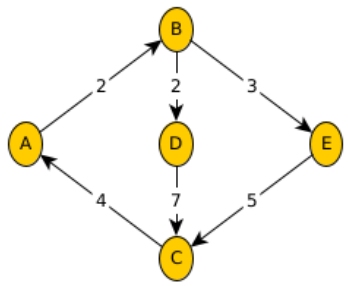
3.2 Ensemble d'arêtes

3.2.1 Collection d'arêtes

On peut donner les arêtes sous la forme d'une collection : `[(1,2), (5,8), ...]`

— si le graphe est orienté, le sens fait partie de la description des arêtes : `(1,2) == de 1 vers 2`
— si le graphe est pondéré, on doit stocker le poids dans la liste des arêtes : `(1, 2, 12) = de 1 vers 2 avec poids 12`

3.2.2 Exemple

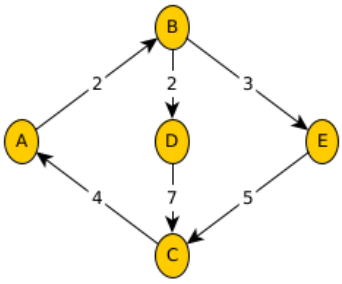



```
V = ["A", "B", "C", "D", "E"]
E = [("A", "B", 2), ("B", "E", 3),
     ("B", "D", 2), ("D", "C", 7),
     ("E", "C", 5), ("C", "A", 4)]
```

3.2.3 Arêtes associées aux noeuds

On peut enregistrer dans chaque noeud les arêtes auxquelles il est connecté, éventuellement avec la direction et le poids.

3.2.4 Exemple




```
E = {
    "A": {"out": [("B", 2)], "in": [("C", 4)]},
    "B": {"out": [("D", 2), ("E", 3)], "in": [("A", 2)]},
    "C": {"out": [("A", 4)], "in": [("D", 7),("E", 5)]},
    "D": {"out": [("C", 7)], "in": [("B", 2)]},
    "E": {"out": [("C", 5)], "in": [("B", 3)]}
}
```

3.3 Matrice d'adjacence

3.3.1 Définition

Une autre représentation des arêtes pour des graphes non pondérés est la **matrice d'adjacence**

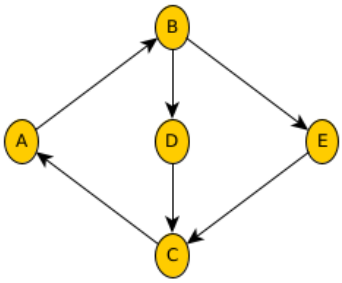
Chaque ligne (horizontal) correspond à un sommet de départ, et chaque colonne (vertical) à un sommet d'arrivée. Si une arête existe entre les deux sommets, on écrit 1, sinon zéro.

Il faut que les sommets soit ordonnés.

Les sommets doivent être ordonnés : A, B, C, D, E

Si le graphe n'est pas orienté, la matrice d'adjacence est **symétrique** par rapport à sa diagonale.

3.3.2 Exemple



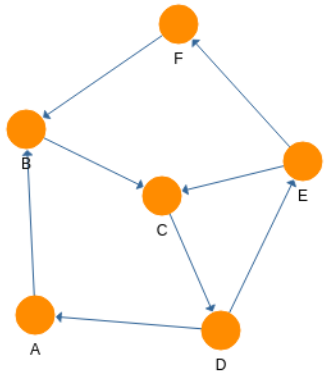
	arrivée				
	A	B	C	D	E
A	0	1	0	X	0

```
       B  0 0 0 1 1
départ C  1 0 0 0 0
       D  0 0 1 0 0
       E  0 0 1 0 0
```

X = arête partant de A allant vers D ? 0/1

3.3.3 Exercice 1

Ecrire la matrice d'adjacence du graphe suivant



Correction :

```
0 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
1 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 1
0 1 0 0 0 0
```

3.3.4 Passage d'une forme à l'autre

TP : Ecrire les fonctions python permettant de passer d'une représentation à une autre.