Graphes (algorithmes)

BARBIER J.M. - LGT Dumezil - NSI

12 février 2026

Table des matières

1 Programme

1.1 Partie structures de données

1.1.1 Programme

Contenus

- Graphes : structures relationnelles
- Sommets, arcs, arêtes, graphes orientés ou non orientés

Capacités attendues

- Identifier des situations nécessitant une structure de données arborescente.
- Evauer quelques mesures des arbres binaires (taille, encadrement de la hauteur, etc..)

Commentaires

- On fait le lien avec la rubrique “algorithmique”

1.2 Partie algorithmique

1.2.1 Programme

Contenus

- Algorithmes sur les graphes

Capacités attendues

— Parcourir un graphe en profondeur d'abord, en largeur d'abord
— Repérer la présence d'un cycle dans un graphe
— Chercher un chemin dans un graphe

Commentaires

— Le parcours d'un labyrinthe et le routage dans Internet sont des exemples d'algorithmes sur les graphes.
— L'exemple des graphes permet d'illustrer l'utilisation des classes en programmation

2 Rappel des définitions

2.1 Graphe simple

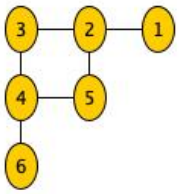
2.1.1 Définition

Un graphe simple est un couple $G = (V, E)$ comprenant

— V un ensemble de sommets (ou noeuds, ou vertice (en))
— E un ensemble d'arêtes reliant ces sommets (ou arcs, ou flèches, ou edge (en))

Une arête est un couple de sommets.

2.1.2 Exemple



2.2 Graphe orienté

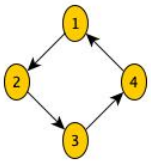
2.2.1 Définition

Lorsque les arêtes ont une **direction** (flèche), elles sont orientées

Une arête orientée ne se parcourt que dans le sens de la flèche. Dans ce cas on note généralement les arêtes avec des parenthèses pour désigner des couples.

Si c'est un réseau de transport, on peut se rendre de 1 vers 2, mais pas dans l'autre sens (sens interdit)

2.2.2 Exemple



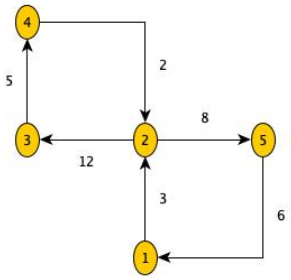
2.3 Graphe pondéré

2.3.1 Définition

Toutes les arêtes ne sont pas équivalentes (type de route par exemple)

On attribue un *poids* (weight) aux arêtes.

2.3.2 Exemple



2.4 Voisinage

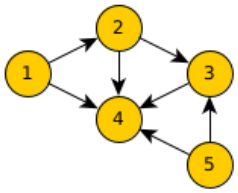
2.4.1 Définition

Lors qu'il y a un arc d'un sommet *s* à un sommet *t*, on dit que *t est adjacent à s*. Le voisinage d'un sommet est l'ensemble de ses sommets adjacents.

Dans un graphe non orienté, si il y a un chemin de u vers v, il y a aussi un chemin de v vers u, mais ce n'est pas forcément le cas dans un graphe orienté.

2.4.2 Exemple

Donner le voisinage de chacun des sommets du graphe orienté ci-dessous.



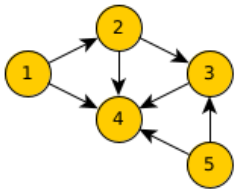
2.5 Chemin

2.5.1 Définition

Dans un graphe donné, un **chemin** reliant un sommet *u* à un sommet *v* est une séquence finie de sommets reliés deux à deux par des arcs et menant de *u* à *v*

2.5.2 Exemple

Donnez 3 chemins reliant 1 à 4 dans le graphe ci-dessous. Y a t'il un chemin entre 5 et 1 ?



2.6 Cycle

2.6.1 Définition

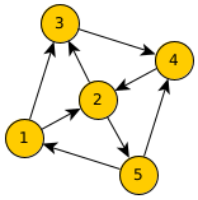
Un chemin est dit **simple** si il n'emprunte pas deux fois le même arc, et **élémentaire** si il ne passe pas deux fois par le même sommet.

Un chemin *simple* reliant un sommet à lui-même et contenant au moins un arc est appelé un **cycle**.

2.6.2 Exemple

Dans le graphe suivant :

- donnez un exemple de chemin **non simple**
- donnez un exemple de chemin **non élémentaire**
- donnez un exemple de **cycle**



2.7 Distance

2.7.1 Définition

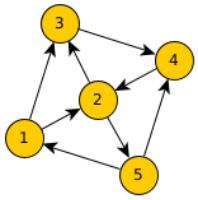
La **longueur d'un chemin** est définie comme le nombre d'arcs qui constituent ce chemin. La **distance** entre deux sommets est la longueur du plus court chemin reliant ces deux sommets. Si aucun chemin n'existe entre deux sommets, la distance n'est pas définie.

La distance d'un sommet à lui-même vaut zéro. Dans un graphe non orienté, la distance d'un sommet *u* vers un sommet *v* est la même que la distance entre *v* et *u*. Ce n'est pas forcément le cas dans un graphe orienté.

2.7.2 Exemple

Dans le graphe ci-dessous, donnez la distance entre :

— 1 et 4
— 4 et 1
— 5 et 3



2.8 Connexité

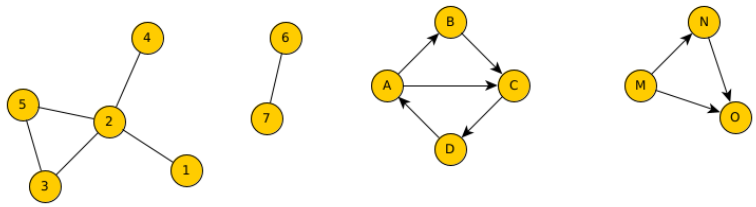
2.8.1 Définition

On dit qu'un graphe non orienté est **connexe** si, pour toute paire *u,v* de sommets, il existe un chemin de *u* à *v*.

Pour un graphe orienté, on dit qu'il est connexe si le graphe non orienté obtenu en oubliant le sens des flèches est connexe. On dit qu'il est **fortement connexe** si il existe un chemin de *u* vers *v* sans oublier le sense des flèches.

2.8.2 Exemple

Graphe non orienté non connexe, graphe orienté fortement connexe, graphe orienté connexe.



3 Parcours en profondeur

3.1 Principe

3.1.1 Exemple d'un labyrinthe

L'idée du parcours en profondeur est basée sur le principe suivant, appliquable par exemple à la recherche de la sortie dans un labyrinthe :

1. on marque les endroits par lesquels on est déjà passé
2. quand on arrive à un embranchement par lequel on est déjà passé, on fait comme si il s'agissait d'un cul de sac et on revient en arrière jusqu'à la précédente intersection où l'on avait plusieurs choix

3.1.2 Principe général

— on "marque" les sommets par lesquels on est passé
— on parcours chaque direction non déjà explorée

3.2 Implémentation récursive

3.2.1 Représentation

Il y a beaucoup de manières de représenter un graphe ; la seule chose dont on ait besoin pour le parcours en profondeur, c'est de pouvoir trouver tous les voisins d'un noeud donné (ce qui est indiqué `voisins_de_s` dans le code ci-après

3.2.2 Implémentation

```
def parcours(graphe, vus, sommet):
    """ Parcours en profondeur du graphe depuis le sommet s

    :param graphe: graphe
    :param vus: liste des sommets déjà vus
    :param s: sommet de départ
    """

    if s not in vus:
        vus.append(s)
        for v in voisins_de_s:
            parcours(graphe, vus, v)
```

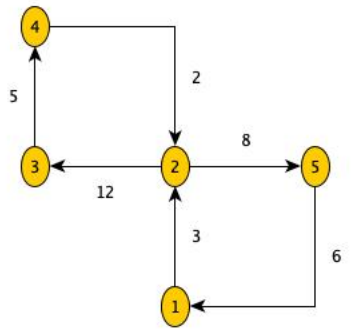
3.2.3 Terminaison et efficacité

Comment peut-on s'assurer que le parcours s'arrêtera un jour ?

Pour un graphe avec N sommets, quel est le coût du parcours en profondeur ?

3.2.4 Exercice

Effectuer à la main toutes les étapes du parcours en profondeur de l'arbre suivant



3.2.5 Exercice

```
0,1,0,1,0,0
0,0,0,0,0,1
1,0,0,1,0,1
0,0,1,0,0,0
0,1,0,1,0,1
1,0,1,0,1,0
```

1. Dessiner le graphe représenté par la matrice d'adjacence ci-dessus
2. Créer une fonction `voisin_de(graphe, s)` qui utilise la matrice d'adjacence pour renvoyer tous les voisins u somme s
3. Implémenter et effectuer le parcours du graphe

Vous pouvez vérifier vos résultats sur https ://graphonline.ru/fr/

3.3 Implémentation non récursive

3.3.1 Principe

Si un graphe comporte trop de sommets, on peut dépasser la profondeur de récursion maximale (environ 1000 ou 2000 en python)

Comme pour les arbres, on peut aussi faire un parcours en profondeur en utilisant une pile.

3.3.2 Implémentation

```
def parcours(graphe, vus, s):
    pile = Pile()
    pile.empile(s)
    while not pile.est_vide():
        s = pile.depile()
        if s in vus:
            continue
        vus.append(s)
        for v in voisins_de_s:
            pile.empile(v)
```

3.3.3 Exercice

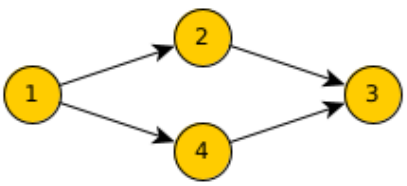
Un utilisant la classe `Pile` réalisée plus tôt dans l'année, implémentez le parcours de l'arbre de l'exercice précédent.

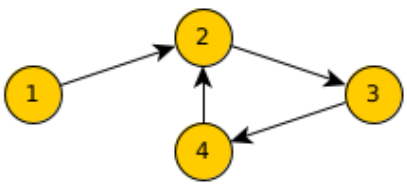
4 Détection de cycle

4.1 Principe

4.1.1 Parcours en profondeur et cycles

Le parcours en profondeur permet de détecter la présence d'un cycle dans un graphe orienté. En effet, quand on tombe sur un sommet déjà visité, il *peut* s'agir d'un cycle.





Dans le premier graphe, le parcours fait d'abord 1 2 3 puis 1 4 et détecte qu'il est déjà passé sur 3, mais ce n'est pas un cycle.

Dans le deuxième graphe, le parcours fait 1 2 3 4 puis détecte qu'il est déjà passé par 2; et dans ce cas c'est un cycle

4.1.2 Coloriage des noeuds

Pour savoir si un noeud déjà atteint est marqué à cause d'un parcours multiple ou d'un cycle, on va "colorier" les noeuds avec différentes couleurs :

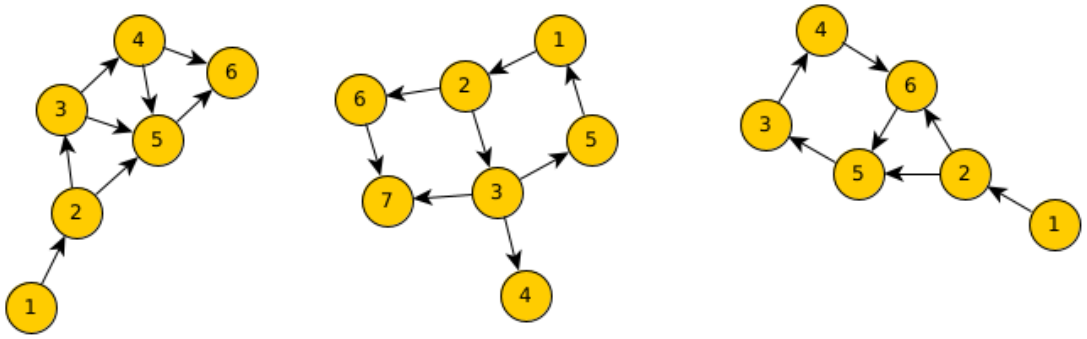
- **blanc** si le noeud n'a jamais été visité
- **gris** si le noeud a été visité, mais pour lequel le parcours en profondeur n'est pas encore terminé
- **noir** si le noeud a été visité, et si son parcours en profondeur est terminé

Ceci permet de savoir si un noeud déjà rencontré est dû à un cycle ou bien à un chemin multiple :

- si on croise un noeud **noir**, c'est dû un parcours multiple
- si on croise un noeud **gris**, c'est dû à un cycle

4.1.3 Exercice

Coloriez et détectez les cycles dans les graphes suivants



4.1.4 Implémentation

On a besoin de la liste des sommets du graphe `sommets_du_graphe` et des voisins de chaque sommet (comme précédemment).

On utilise un dictionnaire avec comme clef chaque sommet et comme valeur la couleur de chaque sommet.

```
BLANC, GRIS, NOIR = 1, 2, 3
def parcours_cycle(graphe, couleurs, s):
    # Détection de cycle ou chemin multiple
    if couleurs[s] == GRIS:
        return True
    if couleurs[s] == NOIR:
        return False

    # Sommet nouveau, on le colorie en gris
    couleurs[s] = GRIS
```

```
    # On parcourt ses voisins (et on quitte si on a trouvé un cycle)
    for v in voisins_de_s:
        if parcours_cycle(graphe, couleurs, v):
            return True
    # On a fini toute l'exploration de ce sommet => colorié en noir
    couleurs[s] = NOIR
    return False

def cycle(graphe):
    # On prépare la peinture
    couleurs = {}
    for s in sommets_du_graphe:
        couleurs[s] = BLANC

    # On teste l'existence de cycle pour tous les sommets
    for s in sommets_du_graphe:
        if parcours_cycle(graphe, couleurs, s):
            return True
    return False
```

4.1.5 Terminaison et efficacité

Comment peut-on s'assurer que la recherche de cycle s'arrêtera un jour ?

Pour un graphe avec N sommets, quel est le coût de la recherche de cycle ?

4.1.6 Exercice

Implémenter et lancer la recherche de cycle sur les 3 exemples de graphes de l'exercice précédent.

5 Recherche du plus court chemin

5.1 Algorithme de Dijkstra

5.1.1 Introduction

On a souvent besoin de chercher le chemin le plus “court” entre deux sommets d’un graphe :

- le chemin le plus court (en temps de trajet) entre une ville et une autre
- le chemin le plus court (en distance) entre une ville et une autre
- le chemin le plus court (au sens métrique OSPF) dans un réseau
- le chemin le plus court entre l’entrée et la sortie d’un labyrinthe

Pour des graphes avec des poids *positifs*, on utilise fréquemment l’algorithme de Dijkstra (parcours en largeur). Voir wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Dijkstra

5.1.2 File de priorité

Une **file de priorité** est une structure de données qui permet d’extraire l’élément de plus petite priorité (ou de plus grande priorité selon la convention choisie).

Exemple : 5 personnes se présentent dans l’ordre aux urgences. Le régulateur évalue la gravité de leur état : A(1), B(2), C(1), D(2), E(1). Le remplissage de la file de priorité est le suivant :

```
# Sortie par la gauche
A(1)
A(1) B(2)
A(1) C(1) B(2)
A(1) C(1) B(2) D(2)
A(1) C(1) E(1) B(2) D(2)
```

Insertion : $O(\log(n))$; Extraction : $O(1)$

5.1.3 Algorithme de Dijkstra

On utilise l’algorithme suivant :

- Initialiser `dist[source] = 0`, `dist[v] =` ∞ pour tous les autres.
- Insérer `(0, source)` dans la file de priorité.
- Tant que la file n’est pas vide :
  - Extraire le sommet u avec la plus petite distance d de la file.
  - Si `d > dist[u]`, ignorer (sommet déjà traité avec une meilleure distance).
  - Pour chaque voisin v de u : si `dist[u] + poids(u,v) < dist[v]`, mettre à jour `dist[v]` et insérer `(dist[v], v)` dans la file.

Simulation (non orienté) / Simulation (orienté)